Casse-tête de janvier 2014

de Diophante

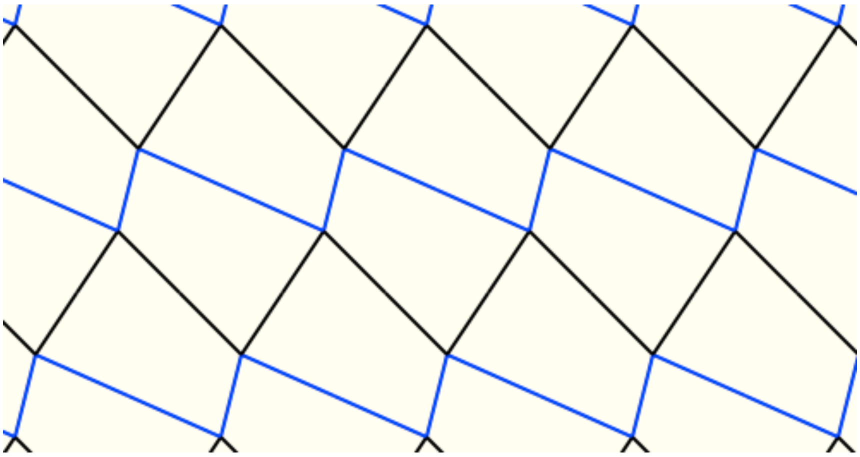
On dispose de carreaux en céramique identiques de forme hexagonale. Ils ont la caractéristique d'avoir **deux côtés opposés parallèles et de même longueur**.

Démontrer qu'il est possible de **paver tout le plan** avec ces carreaux sans chevauchement ni trous.

La caractéristique de deux côtés opposés et de même longueur est-elle nécessaire pour réaliser un pavage complet du plan avec des carreaux de forme hexagonale ?

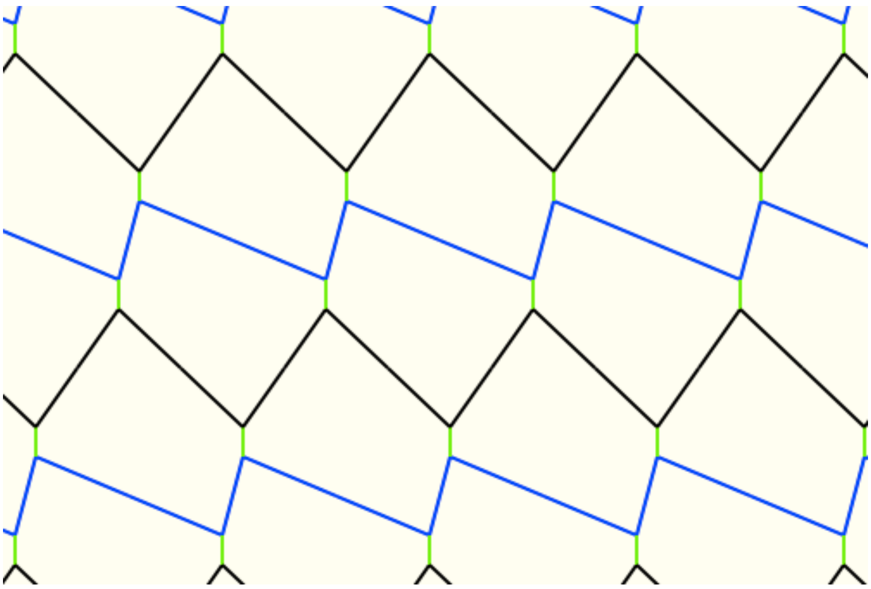
Solution

Rappelons que tout quadrilatère (non croisé) est un motif, qui reproduit en nombre, permet de paver régulièrement le plan. Partant d'un exemplaire fixé, il suffit de proche en proche de lui adjoindre les images (des quadrilatères déjà placés) par demi-tours, dont les centres sont les milieux des côtés déjà en place.

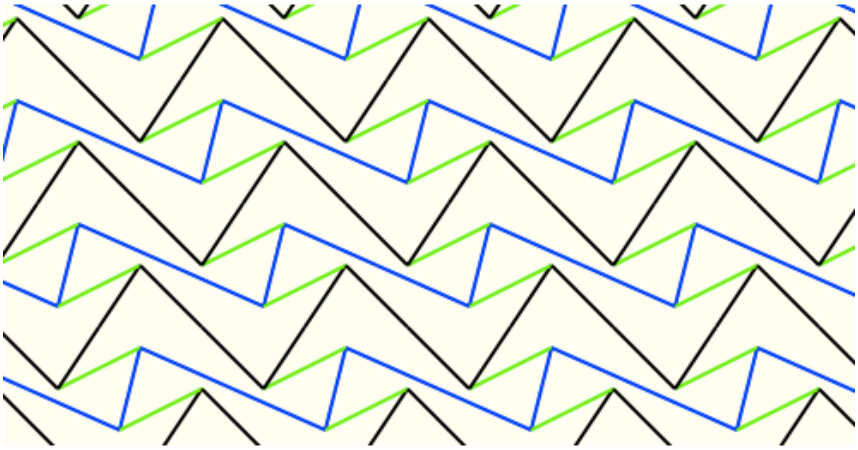


Ce pavage est dit de type p2, selon la nomenclature des cristallographes.

Dans le pavage ci-dessus, dédoublons chaque point aux extrémités de petits segments parallèles et égaux (verts). On obtient un nouveau pavage, où le pavé est un hexagone, dont deux côtés opposés sont parallèles et égaux.



Une grande liberté est laissée dans le choix du segment de dédoublement.

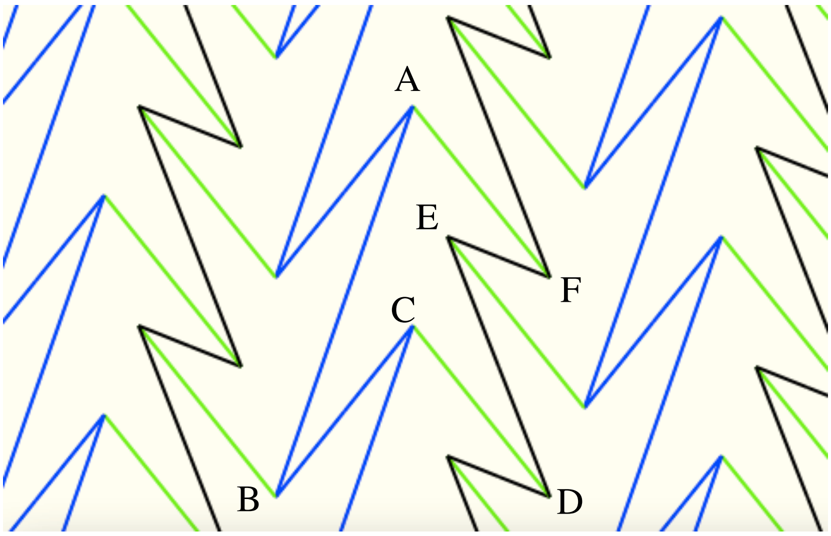


L'essentiel étant que l'hexagone ne soit pas croisé.

Ce préambule relate la genèse de ce problème.

Ceci étant, soit ABCDEF un hexagone tel que les vecteurs AF et CD soient égaux. Alors, les vecteurs AC et FD sont égaux et les milieux des segments AB, BC, DE et EF sont les sommets d'un parallélogramme.

En prenant ces points comme centres de demi-tours, on engendre un pavage de type p2, dont ABCDEF est le pavé prototype.

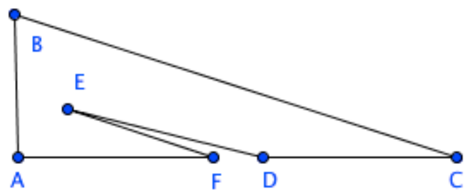


De manière constructive, tous les pavés de ce type s'obtiennent en choisissant arbitrairement un parallélogramme ACDF et deux points B et E, avec la seule contrainte que l'hexagone ABCDEF ne soit pas croisé.

Modulo les transformations linéaires du plan, on peut considérer que les points A, C, D, F sont imposés. Il reste alors quatre paramètres réels pour choisir B et E, ce qui donne une très grande variété de solutions.

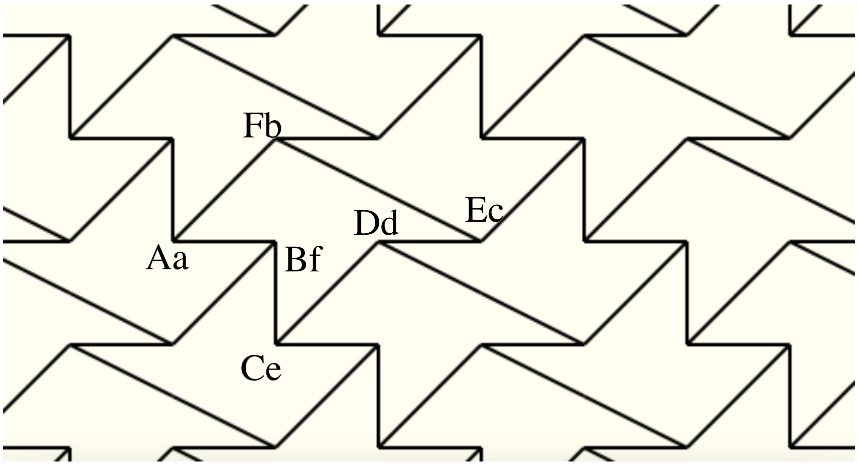
Jusqu'à présent, les deux côtés opposés parallèles et de même longueur sont tels que les vecteurs AF et CD sont égaux.

Comme ci-dessous, le cas, où ces deux vecteurs AF et CD sont opposés, n'amène pas un pavage.



En effet, avec des pavés égaux il n'est pas possible de combler l'angle en E.

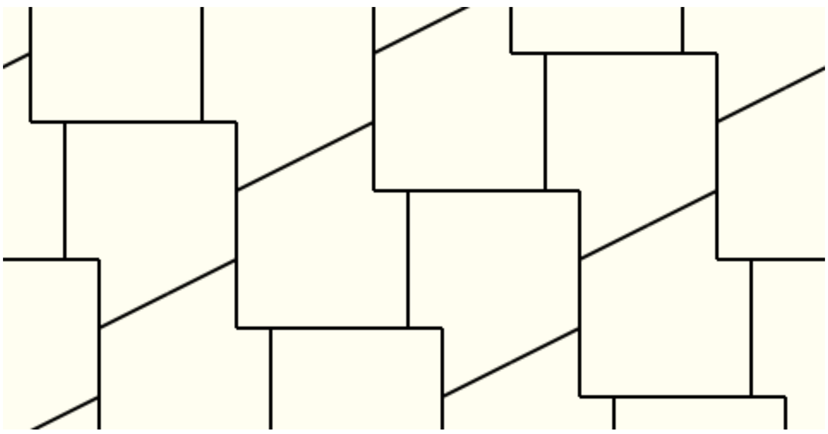
Il existe cependant des hexagones possédant cette propriété, qui pavent le plan.

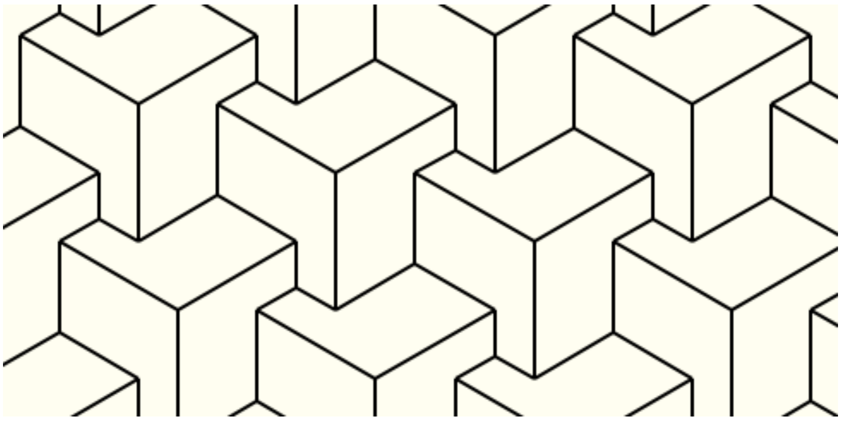


Par exemple, ci-dessus, le pavé possède deux paires de côtés opposés parallèles et égaux et on observe que les vecteurs AF et CD sont égaux (cas du début de l'étude) alors que les vecteurs af et cd sont opposés (second cas).

Enfin, la caractéristique de deux côtés opposés et de même longueur n'est pas nécessaire pour réaliser un pavage complet du plan avec des carreaux de forme hexagonale.

En voici deux exemples, pour les types p2 et p3.





En conclusion, tout hexagone ABCDEF non croisé, tel que les vecteurs AF et CD sont égaux, permet de paver le plan selon un pavage de type p2.