H164. A la recherche des extrêmes ****

Diophante donne à Zig le nombre entier z > 4 et à Puce le nombre entier p > 4 puis il demande à chacun d'eux de tracer sur le recto puis sur le verso d'une feuille de papier respectivement z et p points de sorte que trois points quelconques ne sont jamais sur la même droite.
Sur le recto, chacun trace le maximum possible de quadrilatères convexes et sur le verso le plus petit nombre possible de quadrilatères convexes.

Q_1 Zig constate qu'il a tracé au total 45 quadrilatères de plus que Puce. Déterminez z et p en justifiant vos réponses Donnez des exemples de configurations obtenues par les deux comparses.

Q_2 Cher lecteur, avec un point de plus que Zig, déterminez le plus petit nombre possible de quadrilatères convexes que vous pouvez tracer.

PROPOSITION Th Eveilleau

Q_1

Le maximum est obtenu **avec des points cocycliques** : dans ce cas tous les quadrilatères sont convexes.
Dans ce cas, on obtient $\binom{n}{4}$ quadrilatères convexes.

Avec 7 points le maximum est $\binom{7}{4}$ = 35 quadrilatères convexes.

Avec 8 points le maximum est $\binom{8}{4}$ = 70 quadrilatères convexes.

Le minimum pour 4 points est 0 : si l'un des points D est à l'intérieur du triangle ABC formé par les trois autres.

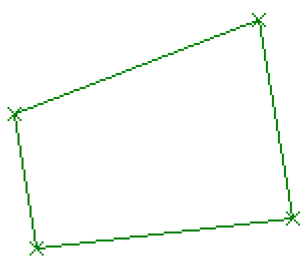
Le minimum pour 5 points est 1 : (quatre points A, B, C et D précédents puis le cinquième E à l'intérieur de ABC).

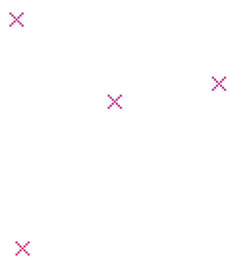
<u>Théorème du happy end</u> (dû à Paul Erdös car ce théorème aurait conduit au mariage entre George zekeres et Esther Kleine**).**
Parmi cinq points quelconques du plan (donc non alignés), il est toujours possible de tracer un quadrilatère convexe.
Le minimum serait de $\binom{n}{5}$ quadrilatères convexes.

Cependant ce nombre n'est pas le minimum car on peut ainsi compter plusieurs fois un groupe de 4.
Prenons par exemple cinq points   A, B, C, D et E.
Supposons que ABCD est le seul quadrilatère convexe possible.
Avec 6 points, A, B, C, D, E et F
Supposons qu'avec A, B, C D et F on a déjà ABCD. Pour avoir le minimum, on ne peut pas prendre BCDF no ABCF...

Avec 4 points

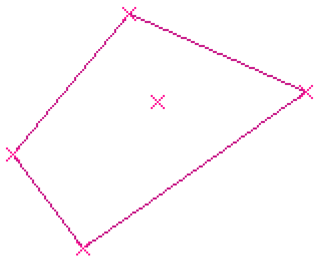
Maximum : 1 ; Minimum : 0 ; Total   **1 + 0 = 1.**





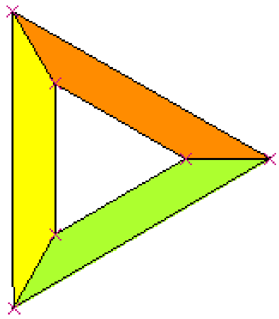
Avec 5 points

Maximum : $\binom{5}{4}$ = **5** en prenant cinq points sur un cercle.



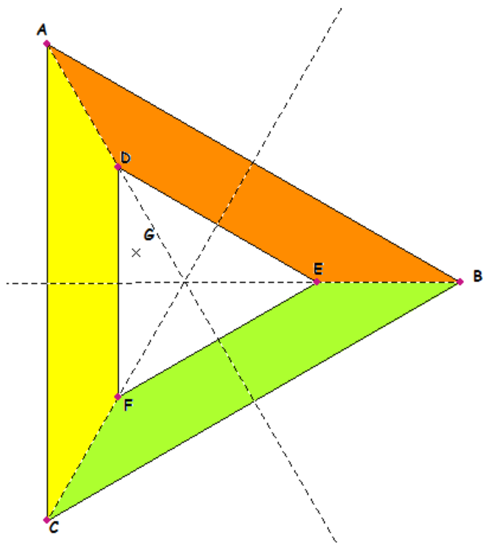
Minimum : 1 ; Total **5+1 = 6.**

Avec 6 points



Maximum : $\binom{6}{4}$ = 15 en prenant six points sur un cercle.
Minimum : 3, obtenu en dessinant deux triangles équilatéraux l'un dans l'autre avec des côtés parallèles deux à deux.
Total **15+3 = 18.**

Avec 7 points



Maximum : $\binom{7}{4}$ = **35** en prenant sept points sur un cercle.

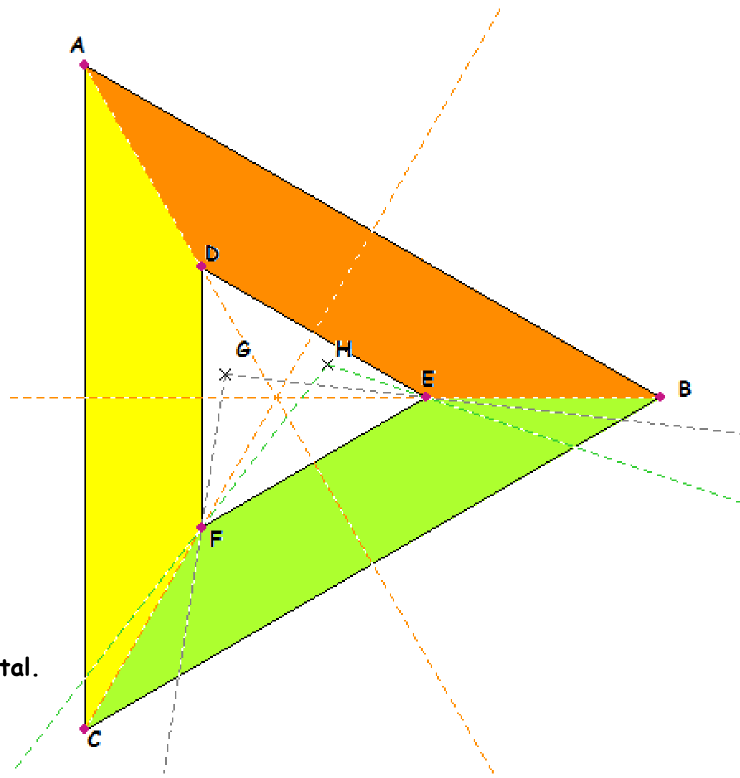
Minimum : 3+3*2 = 9, obtenu en dessinant un point dans le plus petit triangle équilatéral.

Nous avons les **3** quadrilatères convexes précédents solorés.

Ensuite nous avons **6** nouveaux quadrilatères avec G :
ADGF, ADGC,
AGEB, AGFC,
DGFC, DGEB.

Donc Minimum : 6+3 = 9 quadrilatères convexes.
Total **35+9 = 44.**

Avec 8 points



Maximum : $\binom{8}{4}$ = **70** en prenant huit points sur un cercle.
Nous avons les
3 avec + **6** avec G, de même + **6** avec H
Puis **4** avec G et H :
FGHE ; CGHE ; CGHB ; FGHB

Minimum : 9 + 9 +1 =19, obtenu en dessinant un point dans le plus petit triangle équilatéral.

Total **70+19 = 89.**

➔

La différence avec le cas précédent est de 45 sur le nombre total.
Cela signifie que

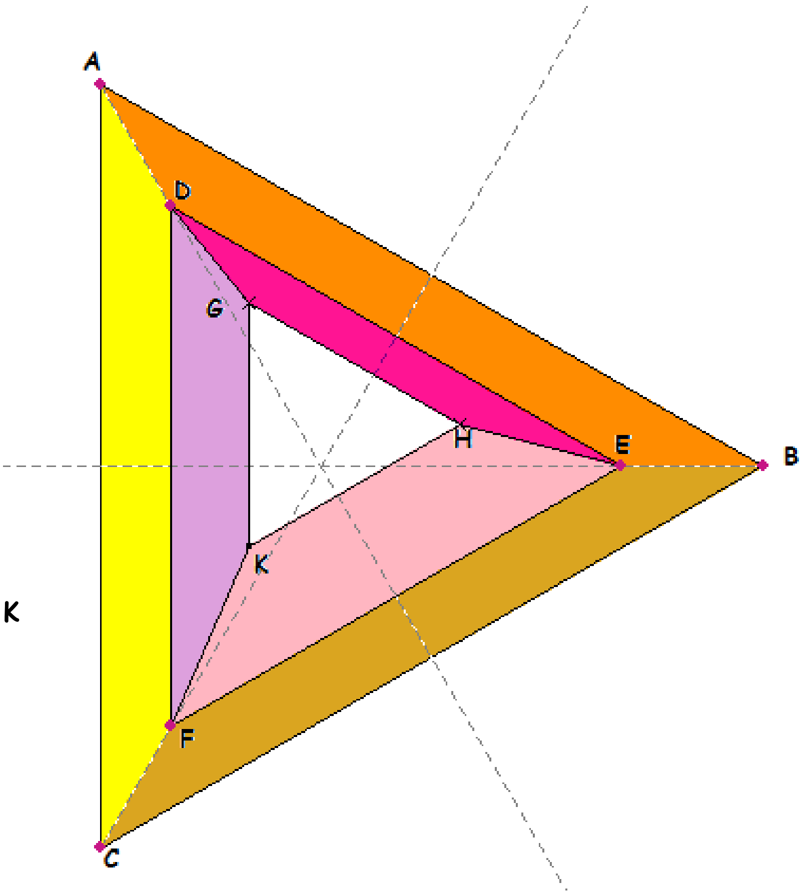
- **Zig avait dessiné 8 points et que**
- **Puce en avait dessiné 44.**

z=8 et p =7.

Q2

Avec 9 points

Maximum : $\binom{9}{4}$ = **126** en prenant neuf points cocycliques.



Minimum :, obtenu en dessinant trois triangles équilatéraux les uns dans les autres avec des côtés parallèles deux à deux.

On suit le schéma précédent avec un nouveau point K

3 avec les 6 points A,B,C,D,E et F ;

6 avec les points A, B, C, D, E, F et G ;

6 avec les points A, B, C, D, E, F et H ;

6 avec les points A, B, C, D, E, F et K ;

6 avec G et H : GHEB, GHED, GHEA, HGDA, HGDB, HGAB
5 avec G et K : GKFD, GKCA, GKFA, GKCA, GKCD,
4 avec H et K : HKFE, HKCB, HKFB, HKCE

Nous avons donc en tout un minimum de **36** quadrilatères convexes.

Total **126 + 36 = 162.**

Le nombre minimal de triangles est ensuite obtenu avec la suite que m'a indiquée *Diophante* :
http://oeis.org/A014540

```
0, 0, 0, 0, 1, 3, 9, 19, 36, 62, 102, 153, 229, 324, 447, 603, 798, 1029, 1318,
1657, 2055, 2528, 3077, 3699, 4430, 5250, 6180
```

Pour en savoir plus , cf :

http://archive.ymsc.tsinghua.edu.cn/pacm_download/21/86-2010On_the_Minimum_Number_of_Convex_Quadrilaterals_in_Point_Sets_of_Given_Numbers_of_Points.pdf