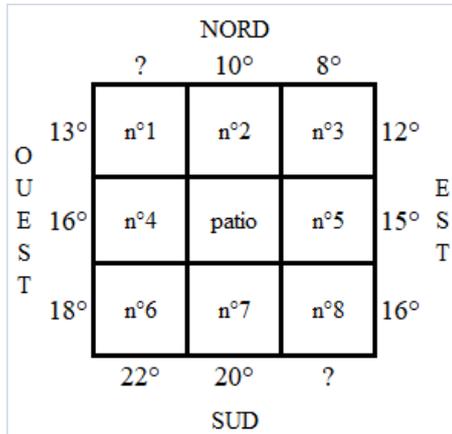


A2801 – Propagation naturelle [*** à la main]



Ce problème est une modélisation simplifiée de la propagation de la chaleur. Une maison est constituée de huit pièces et d'un patio central disposés dans un carré (voir figure ci-contre). Chacune des pièces situées aux quatre coins ont deux fenêtres et les autres pièces ont une seule fenêtre. Chaque fenêtre dispose d'un thermomètre extérieur qui affiche une température supposée constante.

On suppose que la température d'équilibre d'une pièce est la moyenne arithmétique des quatre températures des pièces adjacentes (i.e. partageant un mur commun soit 2,3 ou 4 selon les cas) et des façades extérieures (2,1 ou 0 selon les cas).

Sur les douze températures extérieures, dix sont connues (voir figure ci-contre). La température d'équilibre du patio est de 15°. L'écart de température entre les

PROPOSITION Th Eveilleau

Posons de gauche à droite et de haut en bas les notations suivantes :

N_1, N_2, N_3 les températures au Nord de la maison ;

W_1, W_2, W_3 les températures à l'Ouest de la maison ;

E_1, E_2, E_3 les températures à l'Est de la maison ;

S_1, S_2, S_3 les températures au Sud de la maison.

Posons

xi les températures à l'intérieur de la maison. Nous pouvons écrire :

$$x_1 = (N_1 + x_2 + x_4 + W_1) / 4$$

$$x_2 = (N_2 + x_3 + x_5 + x_1) / 4$$

Nous arriverons en remplaçant x_1 avec la première équation à

$$x_2 = (N_1 + 4N_2 + W_1 + x_4 + 4x_3 + 4x_5) / 15 \text{ PUIS}$$

$$x_3 = (N_1 + 4N_2 + 15N_3 + 15E_1 + W_1 + x_4 + 4x_5 + 15x_6) / 56$$

$$x_4 = (45N_1 + 12N_2 + 3N_3 + 45W_1 + 168W_2 + 3E_1 + 180x_5 + 3x_6 + 168x_7) / 627$$

$$x_5 = (31N_1/4 + 16N_2 + 4N_3 + 93W_1/12 + 15W_2 + 4E_1 + 225x_6/4 + 15x_7 + 209x_8/4) / 178$$

$$x_6 = (47N_1 + 120N_2 + 208N_3 + 47W_1 + 68W_2 + 208E_1 + 712E_2 + 68x_7 + 225x_8 + 712x_9) / 2415$$

$$x_7 = (52N_1 + 30N_2 + 47N_3/4 + 52W_1 + 178W_2 + 2415W_3/4 + 47E_1/4 + 17E_2 + 2415S_1/4 + 660x_8 + 17x_9) / 2237$$

$$x_8 = (42N_1 + 269N_2/4 + 31N_3 + 42W_1 + 403W_2/4 + 165W_3 + 31E_1 + 227E_2/4 + 165S_1 + 616x_9 + 2237S_2/4) / 1876$$

$$\rightarrow x_9 = (3N_1 + 6N_2 + 7N_3 + 3W_1 + 6W_2 + 7W_3 + 7E_1 + 22E_2 + 67E_3 + 7S_1 + 22S_2 + 67S_3 + 44x_9) / 268$$

Et enfin

$$224 x_9 = 3N_1 + 6N_2 + 7N_3 + 3W_1 + 6W_2 + 7W_3 + 7E_1 + 22E_2 + 67E_3 + 7S_1 + 22S_2 + 67S_3$$

Et à la fin nous aurons en remontant les écritures :

$$x_9 = (3N_1 + 6N_2 + 7N_3 + 3W_1 + 6W_2 + 7W_3 + 7E_1 + 22E_2 + 67E_3 + 7S_1 + 22S_2 + 67S_3) / 224$$

$$x_8 = (6N_1 + 10N_2 + 6N_3 + 6W_1 + 14W_2 + 22W_3 + 6E_1 + 14E_2 + 22E_3 + 22S_1 + 74S_2 + 22S_3) / 224$$

$$x_7 = (7N_1 + 6N_2 + 3N_3 + 7W_1 + 22W_2 + 67W_3 + 3E_1 + 6E_2 + 7E_3 + 67S_1 + 22S_2 + 7S_3) / 224$$

$$x_6 = (6N_1 + 14N_2 + 22N_3 + 6W_1 + 10W_2 + 6W_3 + 22E_1 + 74E_2 + 22E_3 + 6S_1 + 14S_2 + 22S_3) / 224$$

$$x_5 = (14N_1 + 28N_2 + 14N_3 + 14W_1 + 28W_2 + 14W_3 + 14E_1 + 28E_2 + 14E_3 + 14S_1 + 28S_2 + 14S_3) / 224$$

$$x_4 = (22N_1 + 14N_2 + 6N_3 + 22W_1 + 74W_2 + 22W_3 + 6E_1 + 10E_2 + 6E_3 + 22S_1 + 14S_2 + 6S_3) / 224$$

$$x_3 = (7N_1 + 22N_2 + 67N_3 + 7W_1 + 6W_2 + 3W_3 + 67E_1 + 22E_2 + 7E_3 + 3S_1 + 6S_2 + 7S_3) / 224$$

$$x_2 = (22N_1 + 74N_2 + 22N_3 + 22W_1 + 14W_2 + 6W_3 + 22E_1 + 14E_2 + 6E_3 + 6S_1 + 10S_2 + 6S_3) / 224$$

$$x_1 = (67N_1 + 22N_2 + 7N_3 + 67W_1 + 22W_2 + 7W_3 + 7E_1 + 6E_2 + 3E_3 + 7S_1 + 6S_2 + 3S_3) / 224$$

Il suffit alors de tester les valeurs probables pour les températures en sachant qu'au Nord, elles tourneront autour de 10° et au sud autour 20°.

Après différents essais nous obtenons :

Les températures extérieures sont de **11°** pour le N₁ et **18°** pour le S₃.
L'été Bourbonnais est assez doux.

Et les températures intérieures suivantes :

13 12.4375 11.75
15.5625 15 14.5625
18.25 17.4375 16.5

La modélisation avec la propagation visible en temps réel est ci-dessous.
Il est possible de modifier la taille de la maison.

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/dirichlet.htm